

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro “*Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*” es la parte práctica del libro anterior llamado “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

| | |
|---|-----|
| Capítulo 1: Señalización para Protección Civil | 1 |
| Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C. | |
| Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble | 29 |
| Christian Boissinotte | |
| Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones | 49 |
| José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix. | |
| Capítulo 4: Horas de luz solar | 63 |
| Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez. | |
| Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento | 73 |
| Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar. | |
| Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas | 83 |
| Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar. | |
| Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales | 91 |
| Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza. | |
| Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización | 101 |
| José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera. | |
| Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones | 125 |
| César Fabián Romero Félix | |
| Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura | 149 |
| María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa. | |
| Capítulo 11: Antenas telefónicas | 162 |
| María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa. | |
| Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra | 173 |
| Fernando Hitt | |
| Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia | 179 |
| Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea. | |
| Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles | 187 |

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 4: Horas de luz solar

Actividad didáctica

Cesar Martínez Hernández¹, María del Carmen Olvera Martínez².

Problemática y propósitos de aprendizaje

Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: representaciones numérica, gráfica y algebraica de una función; variación; visualización, continuidad-discontinuidad.

Específicos: graficación de funciones, función seno y/o coseno (amplitud, periodo, desfase, desplazamiento vertical).

Nivel de estudios

Formación de profesores de secundaria y/o bachillerato.

Total de sesiones y duración aproximada

Dos sesiones (una para la primera parte de la actividad; otra para la segunda) de 1.5 horas cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo
- Una computadora con GeoGebra por estudiantes (o equipo, de ser el caso)
- Acceso a Internet
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales)
- Hojas de papel
- Pintarrón/pizarrón
- Plumones

Método o recomendaciones de enseñanza

El rediseño de la actividad, por un lado, está basado en los seis principios de las Actividades Provocadoras de Modelos (Lesh & Doerr, 2003); y, por otro, la actividad está estructurada

¹ Universidad de Colima, México (†).

² Universidad Juárez del Estado de Durango, México

siguiendo los episodios de resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

En este sentido, la actividad está planteada en cuatro momentos con base en los episodios de resolución de problemas, como a continuación se indica:

Primero momento (cuatro preguntas). Este momento está relacionado con el episodio de comprensión del problema, el cual implica dar sentido a la información dada en la situación, identificar conceptos relevantes, representaciones útiles y el sentido de uso de la tecnología. En este momento de la actividad, se plantean datos referentes a la luz solar de determinado día correspondientes a cuatro meses, obtenidos de www.sunrise-and-sunset.com, para ser graficados mediante GeoGebra, y así comenzar una discusión sobre el tipo de función que pueden representar los datos graficados. Al final de cada momento, se recomienda una discusión grupal de las respuestas de cada participante.

Segundo momento (seis preguntas). Este momento está relacionado con el episodio de exploración, en el cual se espera que el uso de GeoGebra brinde oportunidades al usuario para examinar la situación planteada. Es decir, con el uso de GeoGebra se debe promover la exploración de un modelo a través de acercamientos empíricos (e.g., mediante el uso de deslizadores). Son seis las preguntas que corresponden a este momento, éste refiere a la consulta de información de la página www.sunrise-and-sunset.com, para que el usuario grafique los datos de las horas de luz solar correspondientes al día 21 de los doce meses, a partir de los cuales se promueve un refinamiento del modelo inicial propuesto en el primer momento.

Tercer momento (dos preguntas). Éste se relaciona con la búsqueda de múltiples acercamientos hacia la solución del problema, es decir, en este momento se busca que el usuario, a partir de sus primeros acercamientos empíricos (utilizando la capacidad gráfica de GeoGebra) y las conjeturas que logre formular, intente resolver el problema usando otros acercamientos y formas de argumentar, por ejemplo, el algebraico. Para ello, el alumno debe disponer de acceso a información (en Internet) sobre el tipo de función (modelo) que propone. Así, en este momento, se propone al estudiante la construcción de un nuevo modelo para datos distintos a los analizados en la primeras dos fases, pero para una situación similar, con el objetivo de promover en el alumno la búsqueda de un modelo similar, o bien, otro distinto al de las primeras fases, empleando diferentes recursos y estrategias que los lleven a desarrollar otros acercamientos, además del empírico.

Cuarto momento (cinco preguntas). De acuerdo con los episodios de resolución de problemas, este momento corresponde a la Integración. Es decir, en éste se debe promover una reflexión sobre los procesos involucrados en los episodios previos. Involucra también, el planteamiento de nuevos problemas o una extensión de la situación planteada. En el caso de la formación de profesores, se sugiere que la extensión del problema sea un cuestionamiento relacionado con una reflexión sobre su posible práctica docente, respecto a un escenario de enseñanza con sus propios alumnos, sobre la actividad planteada. Las cinco preguntas de este momento, promueven una reflexión del proceso seguido en la construcción de los modelos que representan las situaciones planteadas en la actividad.

Referencias

Horas de luz solar

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism. Models and Modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching* (pp. 35-58). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1), 279-302.

Actividad (primera parte): Horas de luz solar

Nombre(s): _____ Fecha: _____

Nivel en que imparte clases: _____ Años de experiencia docente: _____

Formación inicial: _____

INSTRUCCIONES

Lee con atención la situación propuesta. Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita.

Registra siempre tus respuestas en las hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Primer momento



En el año 2015, en la ciudad de Monterrey, el día más largo ocurrió el 21 de junio (con trece horas cuarenta y dos minutos de luz solar) y el día más corto fue el 21 de diciembre (con diez horas y treinta minutos de luz solar). Los equinoccios, suceden el 21 de marzo y el 21 de septiembre, en los que el día y la noche son aproximadamente iguales a 12 horas.

En la siguiente tabla se registraron los datos anteriores de las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes en la ciudad de Monterrey.

Tabla 1 . Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Monterrey, México.

| Mes | Horas de luz solar |
|------------|--------------------|
| Enero | |
| Febrero | |
| Marzo | 12.10 |
| Abril | |
| Mayo | |
| Junio | 13.77 |
| Julio | |
| Agosto | |
| Septiembre | 12.10 |
| Octubre | |
| Noviembre | |
| Diciembre | 10.5 |

1. Con ayuda de GeoGebra, grafica los datos registrados en la Tabla 1.

2. ¿Qué tipo de función crees que representan los puntos graficados? ¿Por qué?

3. Escribe la función que crees que representan esos puntos.

4. ¿Cuál crees que sea el comportamiento de los 21 de cada mes del año 2016?

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes) 

Segundo momento



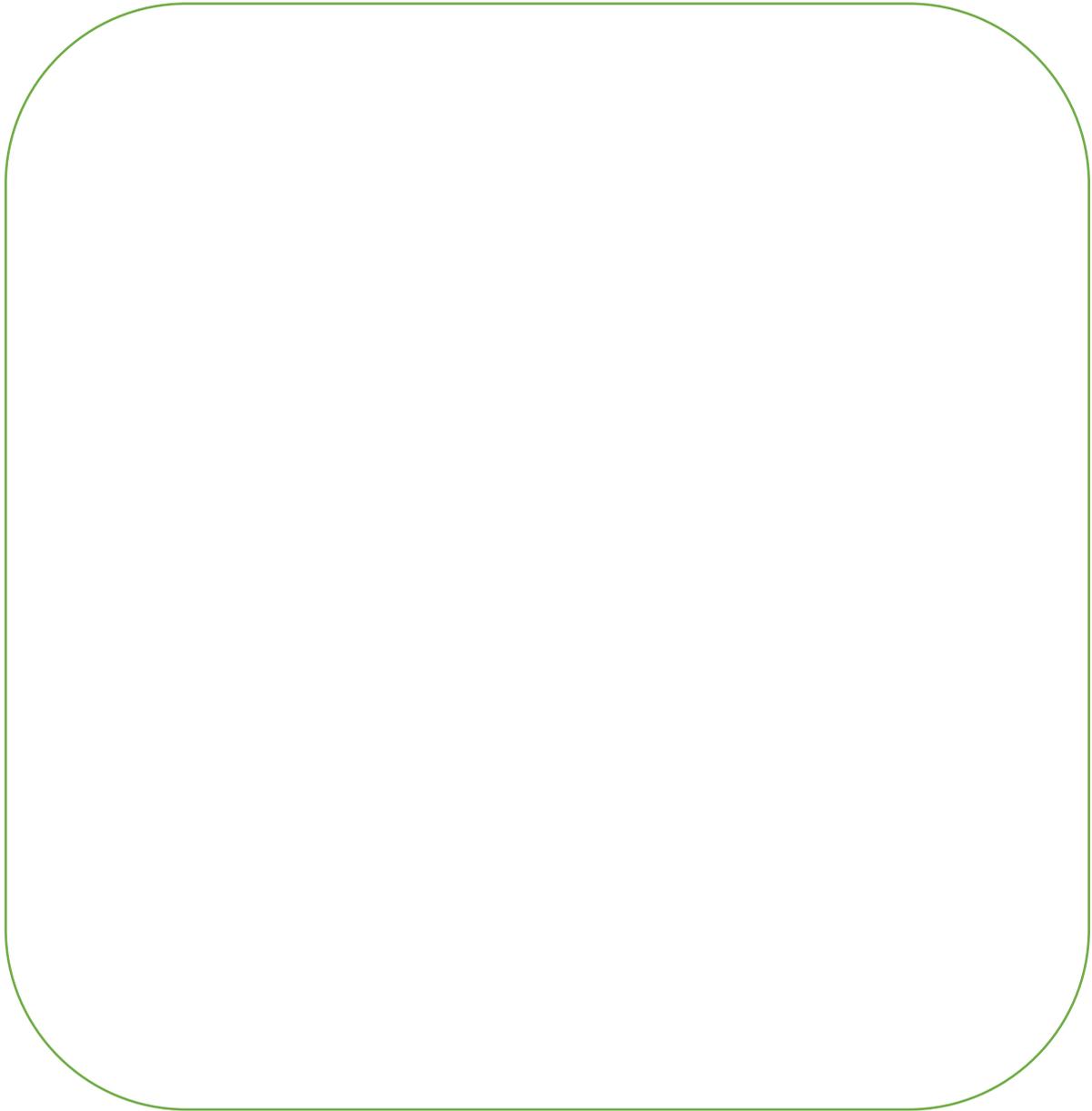
5. Con ayuda de los datos que se proporcionan en la página www.sunrise-and-sunset.com completa la Tabla 1 y grafica en GeoGebra los nuevos datos obtenidos.
6. Con base en la gráfica que obtienes, ¿mantienes tu propuesta a la pregunta 3? ¿Por qué?

7. En caso de que tu respuesta haya cambiado, ¿cuál es el tipo de función que representan los puntos de la última gráfica?

8. En GeoGebra, grafica la función que propones y asigna un deslizador a cada uno de sus parámetros.
9. Varía los valores de los deslizadores hasta encontrar la gráfica que pase por todos los puntos. ¿Qué valores obtuviste para cada parámetro?

Horas de luz solar

10. En la función que propones, utilizando GeoGebra y el uso de los deslizadores, ¿qué sucede en la gráfica cuando se mueve cada uno de los deslizadores?



Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes)



Actividad (segunda parte): Horas de luz solar

Nombre(s): _____ Fecha: _____

Nivel en que imparte clases: _____ Años de experiencia docente: _____

Formación inicial: _____

INSTRUCCIONES

Las siguientes preguntas, son continuación de las 10 primeras de la actividad “Horas de luz solar”. Lee con atención la situación propuesta y contesta las preguntas; realiza lo que se solicita. Registra siempre tus respuestas en las hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Tercer momento



11. En la Tabla 2 se muestran las horas de luz solar que hubo en el día 21 de cada mes del año 2015 en la Ciudad de Buenos Aires, Argentina.

Tabla 2. Horas de luz solar en el año 2015 en la ciudad de Buenos Aires, Argentina.

| Mes | Horas de luz solar |
|------------|--------------------|
| Enero | 14.03 |
| Febrero | 13.06 |
| Marzo | 12.06 |
| Abril | 10.98 |
| Mayo | 10.15 |
| Junio | 9.8 |
| Julio | 10.13 |
| Agosto | 10.96 |
| Septiembre | 12.03 |
| Octubre | 13.1 |
| Noviembre | 14.03 |
| Diciembre | 14.43 |

12. Encuentra la función que representa los datos de la Tabla 2.

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes)



Cuarto momento

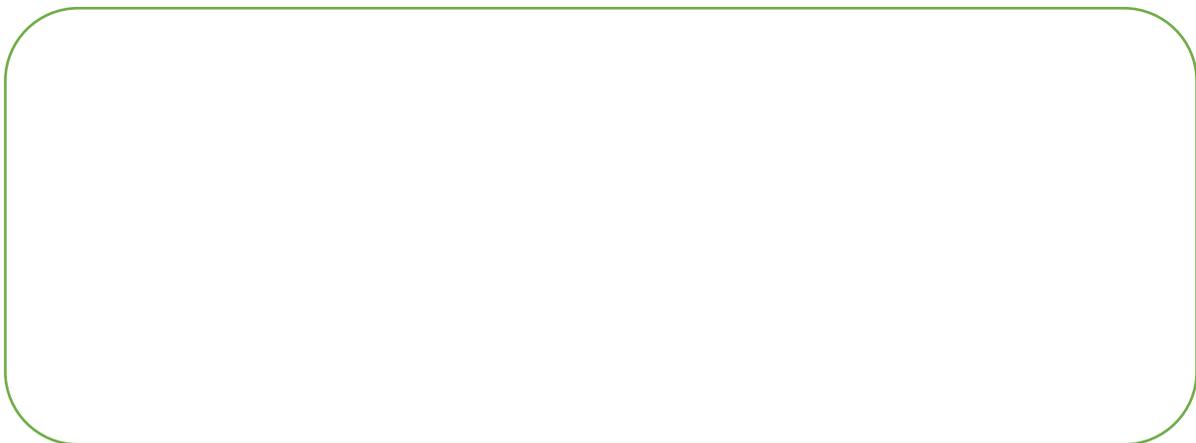


13. Describe el proceso que seguiste para encontrar la función.



14. Grafica en GeoGebra la función que encontraste en la pregunta 12 en el mismo plano que el de la pregunta 9.

15. ¿Qué observas en las gráficas?



16. Completa la siguiente Tabla 3; compara los resultados obtenidos de los datos de Monterrey y Buenos Aires.

| | Diferencias | Semejanzas |
|-----------------------------|--------------------|-------------------|
| Expresión algebraica | | |
| Gráfica | | |

17. Justifica cada una de las diferencias y semejanzas que encuentre.

Discusión grupal (con base en las respuestas de los estudiantes y GeoGebra, se sugiere una discusión grupal de las respuestas de los participantes). En este momento se sugiere que se promueva una reflexión de los participantes acerca de una hipotética situación de enseñanza con los alumnos del nivel educativo en que participan. Como preguntas guías se sugieren: ¿Aplicarías esta actividad con tus alumnos? ¿Qué modificarías de esta actividad para aplicarla con sus estudiantes?, etc.

